APPUNTI DI MATEMATICA

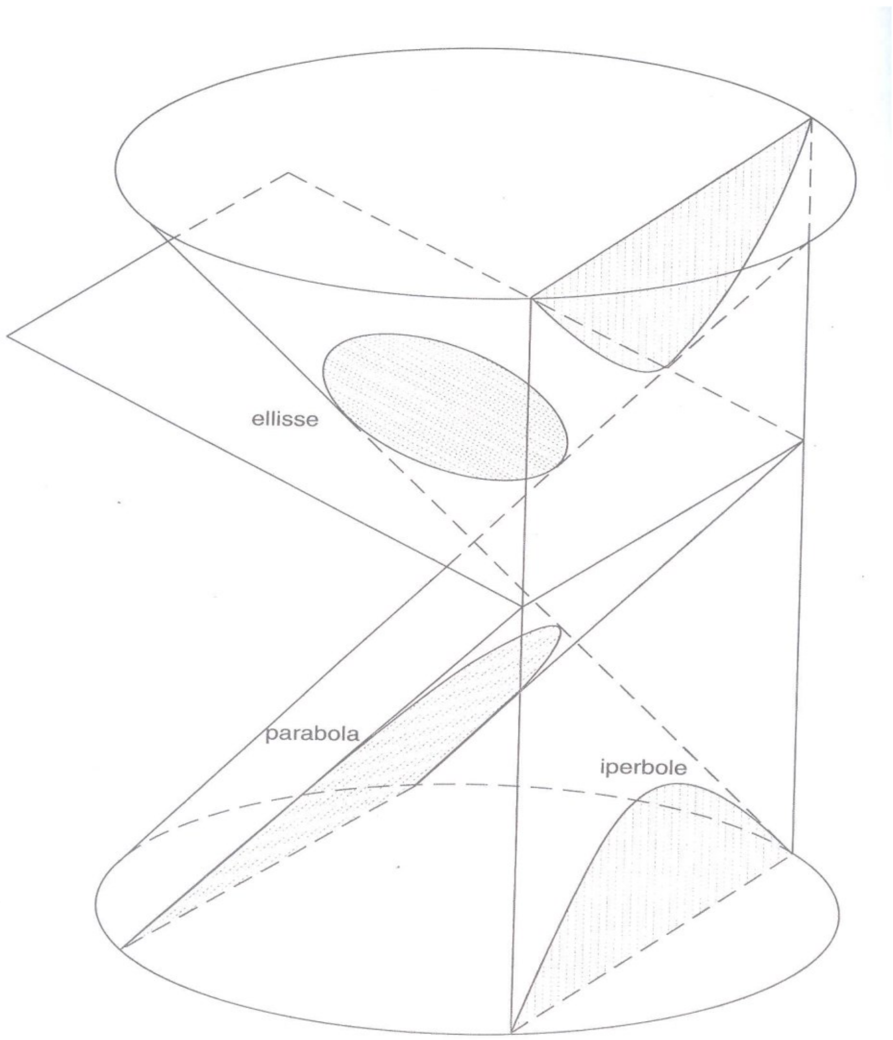
GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ CONICHE (1)

[Un cono di rotazione è la superficie dello spazio generata da una retta (detta generatrice) che ruota attorno ad una retta fissa (detta asse) che la interseca (in un punto detto vertice) formando con l'asse un angolo costante (detto angolo di apertura del cono); tale cono è dunque un cono rotondo indefinito.]

Le **coniche** (tre in tutto: **iperbole** , **parabola** , ed **ellisse** – e, come caso particolare di ellisse, la **circonferenza**) sono curve piane, tutte accomunate dalla proprietà di poter essere ottenute come intersezioni di un cono di rotazione (da cui il nome di "sezioni coniche", o, più semplicemente, di "coniche") con un piano non passante per il vertice.

Dato infatti un cono di rotazione, e, conseguentemente, detto φ l'angolo formato dalla generatrice con l'asse (con $0° < \varphi < 90°$), dato un piano π non passante per il vertice del cono, e detto α l'angolo formato dal piano con l'asse (con $0° \leq \alpha \leq 90°$), si possono presentare i tre seguenti casi:

1) $\alpha > \varphi$: la sezione conica è un'ellisse (in particolare, poi, se $\alpha = 90°$, la sezione conica risulta una circonferenza);
2) $\alpha = \varphi$: la sezione conica è una parabola;
3) $\alpha < \varphi$: la sezione conica è un'iperbole.



APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ CONICHE (2)

Dato che le coniche sono l'intersezione tra un cono e un piano, esse appartengono comunque ad un piano, e dunque possono sempre essere considerate come curve piane (e quindi studiate nella geometria piana); tra le moltissime proprietà di cui godono, in particolare si dimostra che:

1) l'<u>**ellisse**</u> C_E è l'insieme dei punti P del piano tali che la somma delle distanze di P da due punti fissi F_1 e F_2 del piano (detti <u>**fuochi**</u>) è costante;
   (in simboli: $C_E = \left\{ P \in \pi \,/\, \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k \,;\, k \in R \,,\, k > 0 \right\}$)

2) l'<u>**iperbole**</u> C_I è l'insieme dei punti P del piano tali che la differenza (in valore assoluto) delle distanze di P da due punti fissi F_1 e F_2 del piano (detti <u>**fuochi**</u>) è costante;
   (in simboli: $C_I = \left\{ P \in \pi \,/\, \left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = k \,;\, k \in R \,,\, k > 0 \right\}$)

3) la <u>**parabola**</u> C_P è l'insieme dei punti P del piano equidistanti da un punto fisso F del piano (detto <u>**fuoco**</u>) e da una retta fissa d del piano (detta <u>**direttrice**</u>), con F non appartenente a d , ovvero con d non passante per F .
   (in simboli: $C_P = \left\{ P \in \pi \,/\, \overline{PF} = \overline{PH} \;\;,\; con\ H = proiezione\ ortogonale\ di\ P\ su\ d \right\}$)

Tali proprietà sono poi di solito assunte come definizioni fondamentali per lo studio di tali curve in geometria piana (com'è tipicamente nelle scuole superiori in Italia), a prescindere dalla situazione iniziale vista in precedenza, legata invece alla geometria dello spazio.

Passando poi alla geometria analitica del piano (cioè alla geometria del piano cartesiano), si dimostra che:

- <u>ogni conica è comunque descritta da un'equazione del seguente tipo</u>: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, con $a,b,c,d,e,f \in R$; a,b,c non tutti e tre contemporaneamente nulli.
- <u>viceversa</u>, <u>ogni equazione del tipo precedente descrive sempre</u> (a meno di alcuni casi particolari, sostanzialmente inessenziali a questo livello) <u>una curva che è sempre e solo di uno dei tre tipi visti prima</u>, e cioè o un'<u>iperbole</u>, o una <u>parabola</u>, o un'<u>ellisse</u> (e, come caso particolare di ellisse, una <u>circonferenza</u>).

Data la precedente equazione generale di una conica, è facile poi procedere alla classificazione della conica stessa, cioè stabilire di quale conica particolare si tratti.
Si dimostra, infatti, che, posto $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, si ha la seguente situazione:

1) se $\Delta > 0$, la conica è una iperbole;
2) se $\Delta = 0$, la conica è una parabola;
3) se $\Delta < 0$, la conica è una ellisse (o, come caso particolare di ellisse, una circonferenza).

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ CONICHE (3)

La diffusione in natura (e quindi nei fenomeni fisici), nelle arti, e nelle applicazioni tecnologiche delle coniche è vastissima, e di conseguenza anche la loro importanza sia a livello culturale che scientifico; basterà ricordare, a titolo di esempio, anche solo quanto segue.

Sono a pianta ellittica edifici famosi quali il Colosseo e il colonnato di Piazza S. Pietro; sono ellittiche le orbite dei pianeti intorno al Sole, e quelle dei satelliti artificiali intorno alla terra; sono ellittiche le ombre delle sfere; sono ellittiche, infine le sezioni di un cono (come visto all'inizio) o di un cilindro con un piano che li tagli trasversalmente (ne sono un esempio le superfici che si ottengono inclinando un po', senza versarlo, un calice di vino).

Sono iperboli le linee nodali e ventrali nei fenomeni ondulatori di interferenza costruttiva e distruttiva; la proprietà che definisce l'iperbole viene direttamente sfruttata nei sistemi di "radionavigazione iperbolica", aventi lo scopo di "fare il punto" per la nave o per l'aereo.

Sono parabole le sezioni verticali della cupola di S. Maria del Fiore (a Firenze) del Brunelleschi; sono parabole le traiettorie dei corpi lanciati in aria; sono parabole, ad asse verticale, le "curve dei ponti sospesi", cioè le configurazioni di equilibrio delle funi che sostengono, medianti tiranti verticali, un ponte che sopporti un carico pesante omogeneo. Uno specchio "parabolico" è capace di trasformare un fascio di raggi uscenti da un punto in un fascio di raggi paralleli (o viceversa), proprietà questa molto sfruttata nella tecnica (fari, proiettori, etc.).