APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ PARABOLA (1)

La **<u>parabola</u>** C_P è l'insieme dei punti P del piano equidistanti da un punto fisso F del piano (**<u>fuoco</u>**) e da una retta fissa d del piano (**<u>direttrice</u>**) (con F non appartenente a d , ovvero con d non passante per F) , ovvero: $C_P = \left\{ P \in \pi \ / \ \overline{PF} = \overline{PH} \ \ , \ con\ H = proiezione\ ortogonale\ di\ P\ su\ d \right\}$.

Il fuoco e la direttrice sono i due elementi, per così dire, "costitutivi" della parabola, e quindi fondamentali dal punto di vista teorico; la curva, però, presenta altri due elementi notevoli, fondamentali dal punto di vista pratico: la retta s passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice (che risulta essere **<u>asse di simmetria</u>** per la parabola), e soprattutto il punto V dell'asse di simmetria equidistante dal fuoco e dalla direttrice, ossia l'intersezione tra l'asse di simmetria e la parabola (**<u>vertice</u>**), che "ripartisce", per così dire, i punti della parabola nelle due parti tra loro simmetriche (oltre ad avere svariate altre importanti proprietà, come si può ritrovare graficamente).

Nel piano cartesiano, supponendo per semplicità che **<u>l'asse di simmetria sia parallelo all'asse y</u>** (ciò è sempre possibile, a meno di un cambiamento del sistema di riferimento cartesiano, senza quindi perdere in generalità), e applicando la precedente definizione generale, si arriva a dimostrare che l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y può essere scritta nella forma seguente:

$$y = ax^2 + bx + c$$

<u>(EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y)</u>

($a,b,c \in R$, $a \neq 0$; l'equazione, riscritta poi in forma implicita come $ax^2 + bx - y + c = 0$, rispetta appunto il formato generale dell'equazione di una conica, e col $\Delta = 0$, essendo $\Delta = 0^2 - 4 \cdot a \cdot 0 = 0 - 0 = 0$).

La precedente equazione è quindi un'equazione "cartesiana", e quindi l'espressione di una funzione (reale di variabile reale); il caso particolare $y = ax^2$ (con $b = c = 0$) , esprime la "<u>legge di proporzionalità quadratica</u>". La costante reale a (unica tra le tre costanti a,b,c) deve essere diversa da zero (altrimenti non si ha più l'equazione di una curva, ma di una retta); di conseguenza, d'ora in avanti, in tutte le formule della parabola si dà sempre per sottinteso che sia $a \neq 0$, senza doverlo ripetere sempre.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ PARABOLA (2)

PROPRIETA' DELLA PARABOLA (IN GENERALE)

01) La parabola è una curva **illimitata**.

02) La parabola è una curva **continua**.

03) La parabola è una curva **aperta**.

04) La parabola è una curva **simmetrica** rispetto al suo asse di simmetria.

PROPRIETA' DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y

- Se a > 0 , la parabola volge la concavità "verso l'alto" (propriamente, nella direzione positiva dell'asse y);
- Se a < 0 , la parabola volge la concavità "verso il basso" (propriamente, nella direzione negativa dell'asse y).

FORMULE DEI PRINCIPALI ELEMENTI NOTEVOLI DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y

Posto $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, si ha:

01) **Vertice V** : $V\left(-\dfrac{b}{2a} \; , \; -\dfrac{\Delta}{4a} \right)$. [Nota: essendo $V \in C_P$, è anche $V_y = f(V_x)$]

02) **Asse di simmetria s** : $x = -\dfrac{b}{2a}$.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ PARABOLA (3)

INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y

01) **Intersezione con l'asse y**: si ottiene, come sempre, ponendo x = 0 , e ottenendo quindi y = c ; si ha quindi il punto $(0,c)$. Questa intersezione esiste sempre, dato che la funzione (reale di variabile reale) espressa dall'equazione di tale tipo di parabola è definita su tutto l'asse reale, e quindi anche per x = 0 (con y = f(0) = c , appunto).

02) **Intersezioni con l'asse x** (**eventuali**): non è detto esistano sempre, dipendendo dalla particolare posizione della parabola nel piano cartesiano. Posto, come sempre, y = 0 , si ottiene l'equazione numerica intera di 2° grado, in una incognita, "associata" $ax^2+bx+c=0$; posto, come al solito, $\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c$, si hanno le tre seguenti possibilità:

- $\Delta > 0$: l'equazione ha due soluzioni reali distinte (date dalla relativa formula della teoria delle equazioni di 2° grado), che corrispondono alle ascisse dei due punti distinti di intersezione tra la parabola e l'asse x ; l'asse x è quindi secante la parabola nei due punti suddetti.

- $\Delta = 0$: l'equazione ha una sola soluzione "doppia" (data dalla relativa formula della teoria delle equazioni di 2° grado), che corrisponde alla ascissa dell'unico punto di intersezione (punto di "contatto", propriamente punto di "tangenza") tra la parabola e l'asse x ; l'asse x è quindi tangente la parabola nel punto suddetto (precisamente, "da sotto" se a > 0 , "da sopra" se a < 0).

- $\Delta < 0$: l'equazione non ha soluzioni reali, e quindi non vi sono punti di intersezione tra la parabola e l'asse x ; l'asse x è quindi esterno alla parabola (la parabola, quindi, "sta tutta sopra" l'asse x se a > 0 , "sta tutta sotto" l'asse x se a < 0).

[Nota: risolvere l'equazione numerica intera di 2° grado in una incognita $ax^2+bx+c=0$ equivale a risolvere il particolare sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} y = ax^2+bx+c \\ y = 0 \end{cases} \quad ;$$

risolvere algebricamente la predetta equazione equivale quindi a risolvere geometricamente il problema di determinare, se esistono, i punti di intersezione tra la parabola individuata dalla predetta equazione e l'asse x.]