APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ RETTA (1)

Data l'equazione (numerica intera di 1° grado in una incognita, x) $ax + b = 0$ (con a , b $\in$ R ; a $\neq 0$, e quindi equazione determinata) , la sua (unica) soluzione algebrica $x = -\frac{b}{a}$ corrisponde geometricamente all'ascissa di un punto sulla retta (cartesiana).

Teorema:

- ogni retta nel piano cartesiano è rappresentata algebricamente da un'equazione (numerica intera di 1° grado in due incognite, x e y) del tipo: $ax + by + c = 0$ (con a , b , c $\in$ R ; a , b non entrambi nulli) ;
- ogni equazione (numerica intera di 1° grado in due incognite, x e y) del tipo $ax + by + c = 0$ (con a , b , c $\in$ R ; a , b non entrambi nulli) è rappresentata geometricamente da una retta nel piano cartesiano.

<u>Ogni coppia</u> (<u>ordinata</u>!) di numeri reali (x_0, y_0) , tale che risulti $ax_0 + by_0 + c = 0$, si dice <u>soluzione</u> dell'equazione $ax + by + c = 0$ (ovvero, che "soddisfa" l'equazione $ax + by + c = 0$) ; si dice allora che l'equazione è "soddisfatta" dalla coppia (x_0, y_0) , ovvero che, sostituendo a x e y i due valori x_0 e y_0 , l'equazione è "verificata".

L'equazione $ax + by + c = 0$ ammette infinite soluzioni, che si ottengono attribuendo valori arbitrari ad una delle due variabili (teoricamente in tutto R , che è un insieme infinito), e ricavando poi i corrispondenti valori dell'altra variabile; di conseguenza, l'equazione $ax + by + c = 0$ è indeterminata.

Le soluzioni algebriche dell'equazione sono infinite, anche perché corrispondono geometricamente ai punti della retta associata all'equazione, che sono (ovviamente) infiniti.

In conclusione, una qualsiasi soluzione algebrica (x_0, y_0) dell'equazione $ax + by + c = 0$ rappresenta le coordinate di un punto $P_0(x_0, y_0)$ della retta associata, e viceversa le coordinate (x_0, y_0) di un punto $P_0(x_0, y_0)$ di una retta sono soluzione dell'equazione $ax + by + c = 0$ associata.

(Nota: dire che le soluzioni dell'equazione sono infinite non significa dire che qualunque coppia ordinata di numeri reali è soluzione dell'equazione; l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali soluzione dell'equazione è un sottoinsieme proprio dell'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali, R^2, così come una retta del piano è un sottoinsieme proprio di punti del piano.)

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ RETTA (2)

Equazioni fondamentali:

1) equazione **implicita** della retta: $ax + by + c = 0$;
2) equazione **esplicita** della retta: $y = mx + q$ (m = coefficiente angolare) .

Nota importantissima:

- l'equazione implicita consente di rappresentare TUTTE le rette nel piano cartesiano (in base al teorema iniziale) ;
- l'equazione esplicita NON consente di rappresentare tutte le rette nel piano cartesiano, in quanto NON consente di rappresentare le rette parallele all'asse y (rette "verticali") .

Casi particolari e casi notevoli:

1) equazione dell'asse x : $y = 0$ (implicita/esplicita) ;
2) equazione dell'asse y : $x = 0$ (implicita) ;
3) equazione di una retta parallela all'asse x ("orizzontale") : $y = k$ (esplicita) ;
4) equazione di una retta parallela all'asse y ("verticale") : $x = h$;
5) equazione della bisettrice del 1° / 3° quadrante : $y = x$ (esplicita) ; $x - y = 0$ (implicita) ;
6) equazione della bisettrice del 2° / 4° quadrante ; $y = -x$ (esplicita) ; $x + y = 0$ (implicita) ;
7) equazione di una retta passante per l'origine (diversa dall'asse y nel caso dell'equazione esplicita) :
   $y = mx$ (esplicita) ; $ax + by = 0$ (implicita) .

Osservazioni:

- L'equazione esplicita della retta è una equazione "cartesiana", e quindi l'espressione di una funzione (reale di variabile reale);
- il numero 1 è un caso particolare del numero 3 ;
- il numero 2 è un caso particolare del numero 4 ;
- l'equazione $y = k$ corrisponde alla funzione f: R→R "costante" ;
- l'equazione $y = x$ corrisponde alla funzione f: R→R "identica" ;
- l'equazione $y = -x$ corrisponde alla funzione f: R→R "opposto" ;
- una retta (diversa dall'asse y nel caso dell'equazione esplicita) passa per l'origine se e solo se il termine noto dell'equazione è 0 ;
- nell'equazione $y = mx$, $m = \frac{y}{x}$ (con $x \neq 0$) esprime il rapporto tra ordinata e ascissa di ogni punto della retta (ad eccezione dell'origine) , ovvero esprime il rapporto (costante!) tra le due variabili ("legge di proporzionalità diretta") ;
- più in generale, nell'equazione $y = mx + q$, il coefficiente angolare m è il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque della retta associata.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA ANALITICA \ RETTA (3)

<u>Analisi del coefficiente angolare di una retta r di equazione y = mx + q</u> :

1) m = 0 ($\Rightarrow$ y = q costante) : retta parallela all'asse x ("orizzontale") ;
2) m > 0 : la semiretta di r costituita dai punti di ordinata non negativa forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo ACUTO ;
3) m < 0 : la semiretta di r costituita dai punti di ordinata non negativa forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo OTTUSO .

<u>Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette nel piano cartesiano</u>:

Date due rette r e r' , di equazione esplicita (rispettivamente) $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, si ha:

1) <u>condizione di parallelismo di due rette</u> (in forma esplicita $\Rightarrow$ non parallele all'asse y): $m = m'$;
2) <u>condizione di perpendicolarità di due rette</u> (in forma esplicita, ed entrambe non parallele agli assi $\Rightarrow$ m , m' $\neq$ 0): $mm' = -1$, ovvero $mm' + 1 = 0$, ovvero $m' = -\dfrac{1}{m}$.

<u>Intersezioni con gli assi cartesiani</u>:

Data una retta nel piano cartesiano non parallela agli assi cartesiani, di equazione esplicita $y = mx + q$ (m $\neq$ 0), avente quindi una certa "inclinazione" rispetto all'asse x, tale retta ha <u>sempre</u> le intersezioni con gli assi cartesiani, che si ottengono, come sempre, ponendo rispettivamente x = 0 e y = 0 , e ottenendo quindi: $(0, q)$ (intersezione con l'asse y), e $\left(-\dfrac{q}{m}, 0\right)$ (intersezione con l'asse x).

Algebricamente, tali intersezioni esistono sempre perché:

- nel caso dell'intersezione con l'asse y, la funzione (reale di variabile reale) espressa dall'equazione della retta è definita su tutto l'asse reale, e quindi anche per x = 0 (con y = f(0) = q , appunto);
- nel caso dell'intersezione con l'asse x, l'equazione "associata" $mx + q = 0$ è una equazione numerica intera di 1° grado avente R come "insieme di definizione", e quindi sempre determinata con una soluzione reale, che corrisponde appunto all'ascissa del punto di intersezione tra la retta e l'asse x.

<u>Funzione "modulo" (o "valore assoluto")</u>:

A partire dall'equazione e dal grafico della retta, è possibile ricavare subito il grafico di una funzione (reale di variabile reale) estremamente importante: il **<u>modulo</u>** (o **<u>valore assoluto</u>**).

Data allora la funzione f: R→R , f: x→y , y = f(x) = $|x|$ (con $|x|$ = +x se x $\geq$ 0 , $|x|$ = -x se x < 0), il grafico del modulo è costituito nel suo complesso dalla coppia di bisettrici del 1° e 2° quadrante (propriamente, dalla bisettrice del 1° quadrante se x $\geq$ 0 , e dalla bisettrice del 2° quadrante [a rigore, privata del vertice] se x < 0).