APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ RADICALI (1)

Dato un numero naturale n > 0 e un numero reale a $\geq$ 0 , la **radice aritmetica** (non negativa!) **n-esima** di a è il numero reale b $\geq$ 0 la cui potenza con esponente n è uguale ad a ; in simboli:
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

In particolare, se n = 2 , si ha: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$.
Se n = 2 la radice si dice quadrata , se n = 3 la radice si dice cubica .

- La radice n-esima di un numero reale non negativo (in R) esiste sempre ed è unica;
- La radice quadrata di un numero reale negativo in R non esiste (esiste però in C).

La radice n-esima di a si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$, detto **radicale** (aritmetico).

Terminologia:

- operazione: **estrazione della radice** (n-esima) ;
- operandi: a = **radicando** , n = **indice** (del radicale) ;
- risultato: b = **radice** (n-esima) .
- Se il radicando è scritto sotto forma di potenza, l'esponente di tale potenza si chiama **esponente** del radicando ;
- I radicali con indice 2 vengono detti **radicali quadratici** ; i radicali con indice 3 vengono detti **radicali cubici** (se la radice è quadrata, l'indice viene solitamente omesso).

Casi particolari (n numero naturale > 0 , a numero reale $\geq$ 0):

- La radice con indice n = 0 non è definita;
- $\sqrt[1]{a} = a$ (e quindi il primo indice "effettivo" diventa 2) ;
- $\sqrt[n]{1} = 1$ (e quindi $\sqrt{1} = 1$) ;
- $\sqrt[n]{0} = 0$ (e quindi $\sqrt{0} = 0$) ;
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ (e quindi $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$) .

La definizione di radice aritmetica impone che il radicando sia un numero reale non negativo. Se il radicando è un'espressione letterale (monomio, polinomio, frazione algebrica, espressione qualsiasi, etc.), bisogna imporre preliminarmente la condizione che il radicando sia non negativo (condizione di esistenza di un radicale aritmetico, normalmente indicata con C.E.).

Proprietà fondamentale:
Dati due numeri reali a e b $\geq$ 0, e un numero naturale n > 0 , si ha: $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$.
(Non vale, in generale, se a < 0 o b < 0 !)

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ RADICALI (2)

Teoremi sui radicali:

1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ (e quindi $\sqrt{a^m} = \sqrt[2p]{a^{m \cdot p}}$) (n,m,p$\in$ N , n,m,p > 0 ; a$\in$ R , a $\geq$ 0)
(proprietà invariantiva dei radicali; vale inoltre anche per m = 0 , a > 0)

2) $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$ (e quindi $\sqrt[2p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt{a^m}$) (n,m,p$\in$ N , n,m,p > 0 ; a$\in$ R , a $\geq$ 0)
(semplificazione dei radicali; p = divisore comune di n e m; vale inoltre anche per m = 0 , a > 0)

(Un radicale si dice **irriducibile** quando non è più ulteriormente semplificabile, ossia quando l'indice del radicale e l'esponente del radicando sono primi tra loro.)

3) In particolare, $\sqrt[n]{a^n} = a$ (e quindi $\sqrt{a^2} = a$)

4) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ (e quindi $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$) (n$\in$ N , n > 0 ; a,b$\in$ R , a,b $\geq$ 0)
(prodotto di radicali; il teorema vale, più in generale, per un numero qualunque di fattori, e anche nell'altro senso; in particolare: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, ovvero $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$)

5) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ (e quindi $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$) (n$\in$ N , n > 0 ; a,b$\in$ R , a $\geq$ 0 , b > 0)
(quoziente di radicali; il teorema vale anche nell'altro senso; naturalmente, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a} = 1, \sqrt{a} : \sqrt{a} = 1$;
nel caso di frazioni: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, e viceversa $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; naturalmente, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = 1$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$)

6) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ (e quindi $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$) (n,m$\in$ N , n,m > 0 ; a$\in$ R , a $\geq$ 0)
(potenza di un radicale; il teorema vale anche nell'altro senso; in particolare: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
vale inoltre anche per m = 0 , a > 0)

7) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ (e quindi $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$) (n,m$\in$ N , n,m > 0 ; a$\in$ R , a $\geq$ 0)
(radice di un radicale; è possibile inoltre scambiare gli indici delle radici, cioè: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$)

8) Dato il radicale $\sqrt[n]{a^m}$ (con a$\in$ R , a $\geq$ 0 ; n,m$\in$ N , n,m > 0 ; m > n , m = nq + r) , $\sqrt[n]{a^m} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$
(e quindi $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$ se m è pari , $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sqrt{a}$ se m è dispari)
(trasporto di un fattore fuori dal segno di radice; notare che r < m , essendo r < n , n < m .
Se poi, come caso particolare, m è multiplo di n, il risultato è razionale)

9) $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ (e quindi $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$) (n$\in$ N , n > 0 ; a,b$\in$ R , a,b $\geq$ 0)
(trasporto di un fattore dentro al segno di radice)

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ RADICALI (3)

Due radicali **irriducibili** si dicono **simili** quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando, e possono differire solo per il fattore esterno moltiplicativo, detto **coefficiente** del radicale.

Operazioni con i radicali:

1) Addizione e sottrazione: (i singoli radicali possono essere "visti" come monomi):
   - la somma algebrica di due o più radicali **simili** tra loro è il radicale, simile ai radicali dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti (come la somma algebrica di due o più monomi simili tra loro è ancora un monomio simile ai monomi dati);
   - la somma algebrica di due o più radicali **tutti non simili** tra loro resta inalterata, producendo un'espressione irrazionale (come la somma algebrica di due o più monomi tutti non simili tra loro produce un polinomio);
2) Moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza, estrazione della radice n-esima: si applicano di volta in volta i vari teoremi visti in precedenza.

Notare che $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$!

Un' **espressione irrazionale** è un'espressione in cui compaiono anche radicali. Per la sua risoluzione, può essere necessario a volte applicare ai radicali le regole esistenti per polinomi e frazioni algebriche.

Definizione di potenza ad esponente razionale:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (m,n $\in$ N , m $\geq$ 0 , n > 0 ; a $\in$ R , a $\geq$ 0 ; a , m non contemporaneamente nulli) .

Dato un numero naturale n > 0 e un numero reale a , le **radici algebriche n-esime** di a (anche negative!) sono tutti i numeri reali b la cui potenza con esponente n è uguale ad a ; in simboli:
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

In R , la radice algebrica:
- se l'indice è dispari, assume sempre un solo valore (e quindi esiste sempre!), dato da: $+\sqrt[n]{|a|}$ (ossia $\sqrt[n]{a}$) se a > 0 , $-\sqrt[n]{|a|}$ se a < 0 , 0 se a = 0 ;
- se l'indice è pari, può assumere due valori, un solo valore, o nessun valore, a seconda che il radicando sia maggiore di zero, uguale a zero, o minore di zero (e quindi può anche non esistere!); in pratica: se a > 0 le due radici sono $\pm\sqrt[n]{|a|}$ (ossia $\pm\sqrt[n]{a}$) , se a = 0 la radice è 0 , se a < 0 non esistono né radici aritmetiche n-esime di a né radici algebriche n-esime di a .