

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ EQUAZIONI (1)

Un'uguaglianza è una proposizione contenente il simbolo “=” .

- Un'uguaglianza numerica è un'uguaglianza solo tra numeri, ed è sempre sicuramente vera o falsa.
- Un'uguaglianza letterale, invece, è un'uguaglianza contenente una o più lettere (“variabili”), che possono assumere, in generale, uno o più valori di un certo insieme numerico; tale uguaglianza può risultare vera o falsa a seconda dei particolari valori assunti dalle variabili.
- Una **identità** è una uguaglianza letterale che risulta **sempre vera** per ogni valore assegnato alle lettere in essa presenti.
- Una **equazione** è una uguaglianza letterale che risulta vera **solo** per alcuni valori assegnati alle lettere in essa presenti.

Ciascuna delle due espressioni che costituiscono l'uguaglianza viene detta **membro**; in particolare,

- l'espressione di sinistra (rispetto al segno di uguale) viene detta **primo membro**;
- l'espressione di destra (rispetto al segno di uguale) viene detta **secondo membro**.

Un'equazione è quindi un'uguaglianza tra due espressioni letterali, per la quale si cercano i valori (se esistono), da attribuire alle lettere, che la rendono vera.

Risolvere un'equazione significa appunto trovare (se esistono) **tutti** quei particolari valori che, sostituiti alle lettere, rendono l'uguaglianza vera.

- Le variabili presenti in un'equazione sono dette **incognite** dell'equazione;
- I valori che, sostituiti alle incognite dell'equazione, rendono vera l'uguaglianza, si chiamano **soluzioni** o **radici** dell'equazione; si usa dire che esse “verificano” o “soddisfano” l'equazione.

Risolvere un'equazione vuol dire quindi trovare (se esistono) tutte le soluzioni dell'equazione.

(N.b.: il numero delle soluzioni di un'equazione può variare a seconda dell'insieme numerico nel quale si cercano le soluzioni stesse, il cosiddetto “insieme di definizione” dell'equazione data; se un'equazione ammette una certa soluzione in un determinato insieme numerico, ammette la stessa soluzione anche in ogni altro sovrainsieme dell'insieme dato, ma può non ammetterla in qualche sottoinsieme dell'insieme dato. In assenza di indicazioni diverse, d'ora in avanti le soluzioni di una equazione andranno sempre cercate nell'insieme R dei numeri reali.)

- Un'equazione è **numerica** se i coefficienti (delle incognite) sono tutti numerici;
- Un'equazione è **letterale** se almeno un coefficiente è letterale.
- Un'equazione è **intera** se tutte le incognite sono solo a numeratore;
- Un'equazione è **frazionaria** o **fratta** se almeno un'incognita è a denominatore.
- Un'equazione è **determinata** se ha un numero **finito** di soluzioni;
- Un'equazione è **indeterminata** se ha un numero **infinito** di soluzioni;
- Un'equazione è **impossibile** se **non** ha soluzioni (ovvero, se non ha nessuna soluzione; ovvero, se ha zero soluzioni).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ EQUAZIONI (2)

Un'equazione si dice **ridotta in forma normale** se si presenta nella forma di un polinomio (ridotto in forma normale!) uguagliato a 0 .

Il grado di un'equazione è il grado del polinomio uguagliato a 0 nella forma normale dell'equazione.

Un'equazione di primo grado viene detta anche equazione lineare.

Due equazioni sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Primo principio di equivalenza delle equazioni: data un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente sommando o sottraendo ad entrambi i membri la stessa quantità .

Secondo principio di equivalenza delle equazioni: data un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente moltiplicando o dividendo entrambi i membri per la stessa quantità **diversa da 0** .

(N.b.: se la “quantità” è un'espressione letterale contenente qualche incognita, tale quantità deve sempre avere significato nell'insieme di definizione dell'equazione data.)

Applicazioni basilari dei due principi di equivalenza:

- 1) $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$;
- 2) $A = B \Leftrightarrow A - C = B - C$;
- 3) $A = B \Leftrightarrow A * C = B * C$ ($C \neq 0$) ;
- 4) $A = B \Leftrightarrow A : C = B : C$ ($C \neq 0$) ;
- 5) $A = B \Leftrightarrow A - B = 0$;
- 6) $A = B \Leftrightarrow 0 = B - A$;
- 7) $A = B \Leftrightarrow -A = -B$;
- 8) $A = B \Leftrightarrow -B = -A$;
- 9) $A = B \Leftrightarrow B = A$.

Nota: effettuare la “**verifica**” delle soluzioni significa sostituire le soluzioni ottenute alle varie incognite (preferibilmente nell'espressione iniziale dell'equazione!) al fine di ottenere un'uguaglianza numerica vera; nel caso delle equazioni determinate, vanno fatte tante verifiche quante sono le soluzioni dell'equazione.

Equazioni numeriche intere di 1° grado in 1 incognita: in forma normale, $ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

- 1) $a = 0$, $b = 0$: equazione indeterminata (infinite soluzioni);
- 2) $a = 0$, $b \neq 0$: equazione impossibile (nessuna soluzione, ossia 0 soluzioni);
- 3) $a \neq 0$: equazione determinata (1 soluzione); soluzione: $x = -\frac{b}{a}$.