APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ INSIEMISTICA \ TEORIA DEGLI INSIEMI (1)

Un **insieme** è una "collezione" di oggetti.

Il concetto di insieme è un concetto "primitivo".

Deve esistere un criterio chiaro, preciso, non ambiguo, inequivocabile, per poter stabilire se un dato oggetto fa parte oppure no di un certo insieme.

Gli oggetti che formano un insieme si chiamano **elementi** dell'insieme.

- Un insieme si dice **finito** se è formato da un numero finito di elementi;
- Un insieme si dice **infinito** se è formato da un numero infinito di elementi.

- Gli insiemi vengono indicati con lettere dell'alfabeto maiuscole;
- Gli elementi di un insieme vengono indicati (in forma generica) con lettere dell'alfabeto minuscole.

L'insieme che non ha nessun elemento (che non ha elementi, che è privo di elementi) si chiama **insieme vuoto**, e si indica con il simbolo $\varnothing$.

L'insieme vuoto è unico.

- Se x è un elemento dell'insieme A, si dice anche che **x appartiene ad A** (x sta in A, x fa parte di A), e si scrive $x \in A$;
- Se x non è un elemento dell'insieme A, si dice anche che **x non appartiene ad A** (x non sta in A, x non fa parte di A), e si scrive $x \notin A$.

Per descrivere un insieme, è possibile utilizzare una delle seguenti rappresentazioni:

1) Rappresentazione **grafica** (o mediante i diagrammi di Eulero-Venn);
2) Rappresentazione **tabulare**;
3) Rappresentazione **mediante proprietà caratteristica**.

1) Rappresentazione **grafica**: gli elementi dell'insieme vengono racchiusi dentro linee (curve) chiuse. E' sostanzialmente possibile solo per insiemi finiti e con pochi elementi; per insiemi finiti con molti elementi o per insiemi infiniti è raramente utilizzabile.

2) Rappresentazione **tabulare**: gli elementi dell'insieme vengono elencati uno dopo l'altro, racchiusi tra parentesi graffe e separati da virgole; gli elementi non devono essere ripetuti, e possono essere scritti in qualsiasi ordine. E' possibile per insiemi finiti e con pochi elementi; può essere utilizzata, a volte, anche per insiemi finiti con molti elementi o per insiemi infiniti.

3) Rappresentazione **mediante proprietà caratteristica**: l'insieme viene definito enunciando la proprietà che caratterizza in modo univoco e oggettivo ogni elemento dell'insieme stesso. E' utilizzabile con qualsiasi insieme. In forma teorica: I = $\{x / P(x)\}$, ossia: I è l'insieme di tutti gli elementi x per i quali la proprietà P è vera (e si legge: I è l'insieme di tutti gli elementi x tali che P(x) è vera). La proprietà caratteristica di un insieme può non essere unica.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ INSIEMISTICA \ TEORIA DEGLI INSIEMI (2)

<u>Principali insiemi numerici</u>:

- N : insieme dei numeri naturali; $N = \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$
- Z : insieme dei numeri interi; $Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \}$
- Q : insieme dei numeri razionali; $Q = \{ x / x = \frac{n}{m} ; n, m \in Z ; m \neq 0 \}$
- R : insieme dei numeri reali;
- C : insieme dei numeri complessi.

Dati due insiemi A e B , si dice che **B è sottoinsieme di A** <u>se ogni elemento di B è anche elemento di A</u> (ma il viceversa può anche non essere vero, cioè possono esserci elementi di A che non sono elementi di B), e si scrive: $B \subseteq A$ (Espressioni equivalenti: <u>B è contenuto in A</u> , <u>A contiene B</u> , <u>B è incluso in A</u> , <u>B è parte di A</u>).

- Due insiemi A e B sono **uguali** se sono formati dagli stessi elementi (<u>definizione</u>);
- Due insiemi A e B sono **uguali** se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ (<u>criterio</u>).

- Se due insiemi A e B sono uguali, si scrive A = B ;
- Se due insiemi A e B non sono uguali (ossia sono diversi), si scrive $A \neq B$.

Dati due insiemi A e B , si dice che **B è sottoinsieme proprio di A** <u>se ogni elemento di B è anche elemento di A, ma esistono</u> (sicuramente) <u>elementi di A</u> (anche uno solo) <u>che non sono elementi di B</u>, e si scrive: $B \subset A$ (Espressioni equivalenti: <u>B è contenuto propriamente in A</u> , <u>B è incluso propriamente in A</u>). In simboli: $B \subset A$ se $B \subseteq A$ e $B \neq A$, ossia B è contenuto in A , ma B è effettivamente diverso da A.

- $\subseteq$ è il simbolo dell'inclusione "larga" o "debole" ($B \subset A$, o B = A);
- $\subset$ è il simbolo dell'inclusione "stretta" o "forte" ($B \subseteq A$ e $B \neq A$).

Se $B \subset A$, allora $B \subseteq A$; ma se $B \subseteq A$, non è detto che sia necessariamente anche $B \subset A$.

<u>Casi particolari di inclusione</u>:
- $A \subseteq A$ (qualunque sia l'insieme A , anche l'insieme vuoto);
- $\varnothing \subseteq \varnothing$;
- $\varnothing \subseteq A$ (qualunque sia l'insieme A , anche l'insieme vuoto; se poi è $A \neq \varnothing$, allora $\varnothing \subset A$).

Dato un insieme qualunque (eventualmente anche vuoto), l'insieme stesso e l'insieme vuoto sono sempre suoi sottoinsiemi (eventualmente coincidenti nel caso dell'insieme vuoto); <u>l'insieme stesso e l'insieme vuoto sono detti **sottoinsiemi impropri** dell'insieme dato</u>. Ogni insieme non vuoto ha quindi sempre almeno 2 sottoinsiemi (i 2 sottoinsiemi impropri). <u>Ogni sottoinsieme non vuoto strettamente incluso in un insieme (ovviamente non vuoto) è detto **sottoinsieme proprio** dell'insieme dato</u>.

Se B non è sottoinsieme di A, si scrive $B \not\subset A$.

Con riferimento agli insiemi numerici visti in precedenza, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ INSIEMISTICA \ TEORIA DEGLI INSIEMI (3)

Anche fra gli insiemi è possibile definire delle operazioni, così come tra numeri; tali operazioni godono spesso di proprietà simili a quelle delle operazioni numeriche. Qui verrà trattato solamente il prodotto cartesiano.

Dati due insiemi A e B , il **prodotto cartesiano** $A \times B$ dei due insiemi A e B (considerati nell'ordine) è l'insieme di tutte le **coppie ordinate** tali che il primo elemento (della coppia) appartiene al primo insieme A e il secondo elemento (della coppia) appartiene al secondo insieme B .

In simboli: $A \times B = \{ (x,y) \,/\, x \in A \text{ e } y \in B \}$.

Regola pratica: se l'insieme A ha n elementi e l'insieme B ha m elementi, il prodotto cartesiano $A \times B$ ha $n * m$ elementi.

Per rappresentare il prodotto cartesiano, è possibile utilizzare, oltre alla rappresentazione grafica e alla rappresentazione tabulare, anche la **rappresentazione cartesiana** (o **diagramma cartesiano**).

Il prodotto cartesiano tra due insiemi **non** è commutativo: $A \times B \neq B \times A$.

E' possibile calcolare anche il prodotto cartesiano di due insiemi coincidenti (ossia è possibile calcolare anche il prodotto cartesiano di un insieme per se stesso):
$A \times A = \{ (x,y) \,/\, x \in A \text{ e } y \in A \}$; $A \times A = A^2$ = quadrato cartesiano di A (di n^2 elementi) .

Analogamente, è poi possibile calcolare anche il prodotto cartesiano tra più insiemi (3 , 4 , 5 , e così via). Ad es., dati tre insiemi A , B , C , il prodotto cartesiano $A \times B \times C$ dei tre insiemi A , B , C (sempre considerati nell'ordine) è l'insieme di tutte le **terne ordinate** tali che il primo elemento (della terna) appartiene al primo insieme A , il secondo elemento (delle terna) appartiene al secondo insieme B , e il terzo elemento (della terna) appartiene al terzo insieme C.

In simboli: $A \times B \times C = \{ (x,y,z) \,/\, x \in A ,\, y \in B ,\, z \in C \}$.

Naturalmente, se l'insieme A ha n elementi, l'insieme B ha m elementi, e l'insieme C ha l elementi, il prodotto cartesiano $A \times B \times C$ ha $n * m * l$ elementi.

Se i tre insiemi coincidono, si ha:
$A \times A \times A = \{ (x,y,z) \,/\, x \in A ,\, y \in A ,\, z \in A \}$; $A \times A \times A = A^3$ = cubo cartesiano di A (di n^3 elementi) .

Nota:

La cardinalità di un insieme corrisponde al numero di elementi dell'insieme.

Perciò, la regola pratica del prodotto cartesiano si può esprimere anche così: la cardinalità del prodotto (cartesiano) è uguale al prodotto delle cardinalità (dei singoli insiemi).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ INSIEMISTICA \ RELAZIONI E FUNZIONI (1)

Dati due insiemi A e B (non vuoti), una **relazione** (binaria) $\Re$ tra i due insiemi A e B è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Gli elementi di una relazione sono dunque elementi di un prodotto cartesiano, e sono dunque delle coppie ordinate.

Sinonimo di relazione: **corrispondenza** .

Una relazione definita in $A \times B$ è una relazione tra i due insiemi A e B .

Dati gli elementi $a \in A$ e $b \in B$, se la coppia ordinata $(a , b) \in \Re$ si dice che a è in relazione con b , e si scrive $a \Re b$.

Se $a \Re b$, si dice che b è immagine di a (secondo la relazione $\Re$), o che b è corrispondente di a (secondo la relazione $\Re$).

Se i due insiemi A e B coincidono, si parla allora di relazione in A (definita in A , definita in $A \times A$).

Per descrivere una relazione, è possibile utilizzare una delle seguenti rappresentazioni:

1) Rappresentazione **tabulare**;
2) Rappresentazione **cartesiana**;
3) Rappresentazione **sagittale**;
4) Rappresentazione **mediante proprietà caratteristica**.

- Rappresentazione tabulare e rappresentazione cartesiana: sono le stesse del prodotto cartesiano.

- Rappresentazione sagittale: i due insiemi A e B sono rappresentati mediante la rappresentazione grafica (diagrammi di Eulero-Venn); per ogni coppia della relazione, dal primo elemento della coppia parte una freccia che arriva al secondo elemento della coppia. La freccia evidenzia il "verso" della relazione, cioè l'ordine degli elementi di tutte le coppie della relazione.

- Rappresentazione mediante proprietà caratteristica: la relazione viene definita enunciando la proprietà che caratterizza in modo univoco e oggettivo gli elementi della relazione stessa.
  In simboli: dati i due insiemi A e B , dati $x \in A$ e $y \in B$, $x \Re y \Leftrightarrow P(x,y)$.

Data una relazione tra due insiemi A e B ,

- il **dominio** D della relazione è l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno **almeno** un'immagine in B ;
- il **codominio** C della relazione è l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagine di **almeno** un elemento di A .

Di conseguenza, $D \subseteq A$, $C \subseteq B$.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ INSIEMISTICA \ RELAZIONI E FUNZIONI (2)

Dati due insiemi A e B (non vuoti), una **funzione** di A in B è una relazione tra A e B , tale che ad **ogni** elemento di A corrisponde un **solo** elemento di B.

Sinonimi di funzione: **applicazione** , **corrispondenza univoca** .

Per indicare una funzione si usa una lettera dell'alfabeto minuscola (di solito, f); se si devono utilizzare più funzioni contemporaneamente, si usano più lettere dell'alfabeto a partire dalla f (f , g , h , ...).

Per indicare che f è funzione di A in B si scrive f: $A \to B$.

Dati gli elementi $x \in A$ e $y \in B$, se y corrisponde a x si scrive f: $x \to y$.

Se f: $x \to y$, si dice che y è **l**'immagine di x , o **il** corrispondente di x (secondo f), o **il** valore di f in x .

Per indicare la funzione f , si usa anche scrivere y = f(x) (che si legge: y uguale a f di x).

Se i due insiemi A e B coincidono, si parla allora di funzione di A in sé.

Per descrivere una funzione, è possibile utilizzare una delle seguenti rappresentazioni:

1) Rappresentazione **sagittale**;
2) Rappresentazione **cartesiana**.

Data una funzione di A in B ,

- il **dominio** D della funzione è **tutto** l'insieme A ;
- il **codominio** C della funzione è l'insieme formato da tutte le immagini degli elementi di A .

Di conseguenza, D = A , $C \subseteq B$.

Una funzione f: $A \to B$ è **biiettiva** se ogni elemento di B è immagine di un solo elemento di A .
Sinonimi di funzione biiettiva: **biiezione** , **corrispondenza biunivoca** , **corrispondenza "uno a uno"** .

Una funzione f: $A \to B$ è **costante** se il suo codominio consta ($\equiv$ consiste) di un solo elemento (ossia, se $\forall\ x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$); il valore (costante !) della funzione si rappresenta solitamente con la lettera k . Si ha quindi y = f(x) = k , o più semplicemente f(x) = k , o più semplicemente ancora y = k .

Dato un insieme A , si definisce come **funzione identica** o **identità** i (o i_A , se si vuole specificare con precisione l'insieme A cui è riferita) la funzione i: $A \to A$, che ad ogni elemento $x \in A$ associa l'elemento x stesso (ossia, $\forall\ x \in A$, y = i(x) = x).

(Ogni funzione identica è biiettiva, mentre ogni funzione costante NON è biiettiva.)

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ INSIEMISTICA \ RELAZIONI E FUNZIONI (3)

Una funzione si dice **numerica** se i due insiemi A e B sono numerici.

Spesso una funzione numerica è esprimibile mediante una "legge" che contiene operazioni matematiche.

La lettera x , rappresentando il generico elemento del primo insieme A , diventa allora una variabile (**variabile indipendente**); analogamente, la lettera y (con y = f(x)), rappresentando il generico elemento del secondo insieme B , diventa anch'essa una variabile (**variabile dipendente**).
La y è detta variabile dipendente in quanto il valore della y "dipende" dal particolare valore della x collegato.

Si usa spesso dire, quindi, che una funzione f tra due insiemi A e B è una "legge" che ad ogni valore della variabile indipendente x associa un solo valore della variabile dipendente y .

- Una funzione si dice "**reale**" se assume valori in R (ossia, se il suo codominio è contenuto in R) ;
- Una funzione si dice "**di variabile reale**" se il suo dominio è contenuto in R ;
- Una funzione si dice "**reale di variabile reale**" se dominio e codominio sono contenuti in R ;
  si usa allora scrivere <u>convenzionalmente</u> f: R$\rightarrow$R , anche se dominio e codominio possono non coincidere con tutto R (come di solito avviene).

Il principale tipo di rappresentazione di una funzione numerica, e in particolare di una funzione reale di variabile reale, è quello cartesiano, mediante l'utilizzo del piano cartesiano.

Il **grafico** G di una funzione numerica f è l'insieme di tutte le coppie (ordinate!) (x,y), tali che x appartiene al dominio di f , e y è esattamente uguale a f(x); in simboli: $G_f = \{(x, y) / x \in D_f , y = f(x)\}$.

Rappresentare geometricamente una funzione nel piano cartesiano (o, equivalentemente, rappresentare geometricamente il grafico di una funzione nel piano cartesiano) significa appunto costruire il grafico della funzione, evidenziandone (in pratica: disegnandone) tutti i punti (o perlomeno una certa quantità che sia significativa) nel piano cartesiano.